مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

حل دقیق معادله دیراک درحضور پتانسیل عمومی هارتمن به کمک متغیرهای فوق هندسی

محسن حافظ قرآن[۱]، زهرا بخشی[۲]

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله قصد داریم تا با استفاده از شکل عمومی پتانسیل هارتمن، و با اعمال محدودیت هایی بر روی حالت های مقید انرژی، به حل معادله دیراک بپردازیم. یکی از روش های مرسوم برای حل معادله دیراک کمک گرفتن از ماتریس های پائولی به عنوان متغیر هایی مناسب به منظور تبدیل نمودن این معادله به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو می باشد. معادله دیفرانسیل بدست آمده را می توان به دو بخش شعاعی و زاویه ای تفکیک نمود و جواب های هر بخش را به طور مجزا به شکل سری های فوق هندسی بسط داد. چند جمله ای های لاگر حالت خاصی از سری های فوق هندسی هستند که توسط آن ها می توان حل دقیقی را برای معادله دیراک ارائه داد.

در سال های گذشته مجله چن [۱] حل دقیقی از فرمیون ها را برای پتانسیل های برداری و اسکالر در چارچوب کلاسیکی ارائه داد. پتانسیل هارتمن از جمله پتانسیل هایی است که هر دو حالت اسکالر و برداری برای آن وجود دارد [۲]. در حوزه ی فیزیک ذرات، فعالیت های بسیاری در راستای این مدل پتانسیلی صورت گرفته است [۷-۳]. از سوی دیگر سال ها پیش هاتوت [۸] نشان داد که می توان معادله شرودینگر را با اضافه نمودن جملات نامتقارنی همچون $f(\theta)/r^2$ به پتانسیل های کولنی و یا هارمونیکی به طور دقیق حل نمود. در این مقاله نشان می دهیم که معادله ی دیراک متشکل از پتانسیل های برداری یا اسکالر هارتمن که شامل جملات نا متقارن $f(\theta)/r^2$ می باشد، قابلیت حل پذیری کامل را دارد.

شکل عمومی پتانسیل هارتمن به صورت زیر است:

$$V(r,\theta)=-\frac{1}{2}\left(\frac{V_0\lambda}{r}-\hbar^2c^2\,\frac{f(\theta)}{r^2}\right) \tag{۱}$$

و معادله مستقل از زمان دیراک برای هر پتانسیل دلخواه اسکالر و برداری نیز به شکل زیر می باشد:

$$\left[c\vec{\alpha}.\vec{P}+\beta\left(Mc^2+S(\vec{r})\right)\right]\psi(\vec{r})=\left[E-V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) \tag{۲}$$

تعریف می کنیم:

$$\beta\equiv\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\qquad \vec{\alpha}\equiv\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix},\qquad \vec{P}\equiv -i\hbar\vec{\nabla}, \tag{۳}$$

که در آن $\vec{\sigma}$ ماتریس های پائولی و I نمایشی از ماتریس واحد می باشد و همچنین:

$$\psi(\vec{r})=\begin{pmatrix}\varphi(\vec{r})\\ \chi(\vec{r})\end{pmatrix} \tag{۴}$$

و دو رابطه زیر را که نشان دهنده اجزای تشکیل دهنده اسپینوری هستند را بدست می آوریم:

$$c\vec{\sigma}.\vec{P}\chi(\vec{r}) = \left[E - V(\vec{r}) - Mc^2 - S(\vec{r})\right]\varphi(\vec{r})$$
$$c\vec{\sigma}.\vec{P}\varphi(\vec{r}) = \left[E - V(\vec{r}) + Mc^2 + S(\vec{r})\right]\chi(\vec{r}) \qquad (۵)$$

درحالتی که $S(\vec{r}) = V(\vec{r})$ خواهیم داشت:

$$\chi(\vec{r}) = \left[\frac{c\vec{\sigma}.\vec{P}}{E + Mc^2}\right]\varphi(\vec{r}) \qquad (۶)$$

$$\left[c^2\vec{P}^2 + 2\left(E + Mc^2\right)V(\vec{r})\right]\varphi(\vec{r}) = \left[E^2 - M^2c^4\right]\varphi(\vec{r}) \qquad (۷)$$

و با جایگذاری پتانسیل هارتمن در معادله (۷)، معادله ای شبیه به معادله شرودینگر را بدست می آوریم:

$$[-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^2 - \left(E + Mc^2\right)\left(\frac{V_0\lambda}{r} - \frac{f(\theta)}{r^2})\right]\varphi(\vec{r}) = \left(E^2 - M^2c^4\right)\varphi(\vec{r}) \qquad (۸)$$

از جداسازی متغیر ها در مختصات کروی داریم:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{u(r)}{r}\Theta(\theta) \qquad ,m \in Z \qquad (۹)$$

دو معادله جداگانه را برای قسمت های شعاعی و زاویه ای بدست می آوریم که صرفا به بخش شعاعی آن می پردازیم:

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) - \left[\frac{m^2}{\sin^2(\theta)} + \left(E + Mc^2\right)f(\theta) - s\right]\Theta(\theta) = 0 \qquad (۱۰)$$

$$-\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left[\frac{s}{r^2} - \frac{E + Mc^2}{\hbar^2c^2}\frac{V_0\lambda}{r}\right]u(r) = \frac{\left(E^2 - M^2c^4\right)}{\hbar^2c^2}u(r) \qquad (۱۱)$$

روابط فوق تنها در صورتی برقرار می باشد که $|E| < Mc^2$ و با توجه به اینکه در $s < -1/4$ با تکینگی مواجه هستیم، در این نقاط حالت مقیدی برای انرژی وجود نخواهد داشت. رابطه (۱۱) یک ذره غیر نسبیتی با جرم موثر $M_{eff} = 1/2$ تحت تاثیر پتانسیل V_{eff} با انرژی E_{eff} قرار دارد:

$$V_{eff} = \frac{\hbar^2 s}{r^2} - \frac{E + Mc^2}{c^2}\frac{V_0\lambda}{r}, \qquad E_{eff} = \frac{E^2 - M^2c^4}{c^2} \qquad (۱۲)$$

ویژه تابع بهنجار شعاعی $u_{n,l}(r)$ را مستقیما می توان به صورت زیر نوشت [۹]:

$$u_{n,l}(r) = \left\{(2k)^3\frac{\Gamma(n+1)}{2n\left[\Gamma(n+2l+2)\right]^3}\right\}\exp(-kr)(2kr)^{l+1}L_{n-l-1}^{2l+1}(2kr) \qquad (۱۳)$$

که $L_{n-l-1}^{2l+1}(2kr)$ نمایشی از چند جمله ای های لاگر و $\Gamma(n+1)$ نمایشی از تابع گاما و $n = ۰,۱,۲,...$.

تابع $u_{n,l}(r)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$u_{n,l}(r) = f(r)F(g(r)) \qquad (۱۴)$$

به طوری که $g(r) = 2kr$ یک تابع داخلی، $F(g(r)) = \exp(-g/2)L_n^{2l+1}(g)$ یک تابع خاص از چند جمله ای های متعامد می باشد و همچنین $L_n^{2l+1}(g)$ چند جمله ای های لاگر بر حسب g می باشد.

از طرفی $F(g(r))$ جواب های معادله دیفرانسیل زیر می باشد:

$$\frac{d^2F}{dg^2}+Q(g)\frac{dF}{dg}+R(g)F(g)=0 \qquad (۱۵)$$

که در حالت عمومی مقادیر $Q(g)$ و $R(g)$ را می توان برای آن ها محاسبه نمود [۱۰].

$$Q(g(r))=\frac{1-g(r)+\alpha}{g(r)} \qquad (۱۶)$$

$$R(g(r))=\frac{\lambda}{g(r)} \qquad (۱۷)$$

درحالت خاص برای چند جمله ای های لاگر، فرض می کنیم مقادیر $\alpha=2l+1$ و $\lambda=n$ و نهایتا خواهیم داشت:

$$k=\sqrt{\frac{M^2c^4-E^2}{\hbar^2c^2}} \qquad , l=2\sqrt{s+1/4}-1/2>0, \qquad (۱۸)$$

و همچنین رابطه زیر برای انرژی سیستم نیز برقرار خواهد بود:

$$\frac{\left(E^2-M^2c^4\right)}{c^2}=-\left[\frac{\left(E+Mc^2\right)V_0\lambda}{2\hbar c(n+l+1)}\right]^2 \qquad (۱۹)$$

برای ویژه مقادیر انرژی خواهیم داشت:

$$E=Mc^2\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \qquad (۲۰)$$

که در آن $\tau=\dfrac{V_0\lambda}{2\hbar c(n+l+1)}$ می باشد. برای حالت $S(\vec{r})=-V(\vec{r})$ نیز مشابه این روش می توان عمل نمود.

نتیجه گیری

معادله دیراک توسط ماتریس های پائولی و با اعمال پتانسیل های برداری و اسکالری نظیر پتانسیل هارتمن که فاقد تقارن کروی هستند قابلیت تبدیل شدن به معادله دیفرانسیلی شبیه به معادله شرودینگر را دارد که می توان برای آن حل کاملی را ارائه کرد. جواب های این معادلات را می توان به دو بخش شعاعی و زاویه ای تفکیک نمود که در بخش شعاعی جواب های این معادلات شامل حالت خاصی از سری فوق هندسی (چند جمله ای های لاگر) می باشد. از شبیه سازی جواب های معادله با یک تابع خاص از چند جمله ای های متعامد و یک تابع داخلی می توان روشی را برای حل دقیق این معادلات پیشنهاد داد.

مرجع‌ها

1. *C. Y. Chen, Physics Letters* A 339 (2005) 183.
2. *H. Hartmann, Theor. Cim. Acta* 24 (1972) 201
3. *C. Y. Chen, C. L. Liu and D. S. Sun, Physics Letters* A 305 (2002) 341.
4. *A. D. Alhaidari, Phys. Rev. Lett*. 87 (2001) 210405; 88 (2002) 189901
5. *C. Y. Chen, D. S. Sun and C. L. Liu, Physics Letters* A 317 (2003) 80.
6. *C. Y. Chen, F. L. Lu and D. S. Sun, Physics Letters* A 329 (2004) 420.

7. *C. Y. Chen and S. H. Dong, Physics Letters* A 335 (2005) 374.
8. *A. Hautot, J. Math. Phys*. 14 (1973) 1320.1) 9827
9. *E. Merzbacher, Quantum Mechanics, JonhWiley & Sons,New York,1970*
10. *G .Lévai: "A search for shape-invariant solvable potentials" journal of physics* A 22 (1989) 689