

## مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

### جستجوی بهینه شده‌ی $M$ حالت از $N$ حالت کوانتومی

مهری دهنوی، حسین<sup>۱</sup>؛ دشتیان، حسن<sup>۲</sup>؛ یحوی کوچکسرایبی، حسین<sup>۳</sup>؛ رحیمی، ربابه<sup>۴</sup>؛ محمودی خوش‌دره، معصومه<sup>۵</sup>؛ موحدیان، حسین<sup>۶</sup>

<sup>۱،۲،۳</sup> گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل

<sup>۴</sup> دانشگاه آزاد، واحد علوم و تحقیقات تهران

<sup>۵،۶</sup> گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

#### چکیده

در این مقاله الگوریتم جدیدی برای جستجوی کوانتومی  $M$  حالت از تعداد کل  $N=2^n$  حالت ارائه خواهیم داد. الگوریتم پیشنهادی، با اضافه کردن یک کیوبیت هدف بعد از اولین تکرار در الگوریتم احمد یونس [۲،۱]، بهینه می‌گردد. برای این منظور، عملگرهای جدید  $U_f$  و  $P'_{inv}$  معرفی می‌شوند که مشابه با عملگرهای یکانی بکار برده شده در الگوریتم احمد یونس هستند. این عملگرها بر روی فضایی با تعداد  $(n+2)$  کیوبیت عمل می‌کنند. با مقایسه‌ی احتمال موفقیت الگوریتم پیشنهادی در این مقاله با الگوریتم‌های احمد یونس و گراور [۳]، در هر تکرار دلخواه نشان خواهیم داد که، به ازای  $0.2492 \leq M/N \leq 1$ ، همواره احتمال موفقیت الگوریتم پیشنهادی بیشتر از الگوریتم‌های احمد یونس و گراور است. همچنین برای  $0 \leq M/N < 0.2492$ ، در بعضی از نقاط احتمال موفقیت الگوریتم پیشنهادی بیشتر از احتمال موفقیت الگوریتم احمد یونس و گراور می‌باشد.

#### مقدمه

الگوریتم جستجوی کوانتومی برای اولین بار توسط گراور ارائه شد [۳،۴،۵]. این الگوریتم در  $O(\sqrt{N})$  مرحله به جستجوی یک حالت از  $N$  حالت در تعداد  $O(\sqrt{N/M})$  مرحله به جستجوی  $M$  حالت از میان  $N$  حالت می‌پردازد. این الگوریتم از الگوریتم متعارف کلاسیکی که در  $O(N)$  مرحله به جواب می‌رسد، سریعتر است [۶،۷]. احمد یونس، الگوریتمی برای جستجوی کوانتومی پیشنهاد داد که توانست الگوریتم گراور را بهینه سازد [۱،۲]. این الگوریتم نیز در  $O(\sqrt{N/M})$  مرحله به جستجوی  $M$  حالت از میان  $N$  حالت می‌پردازد. می‌توان نشان داد که الگوریتم احمد یونس در مقایسه با الگوریتم گراور بهتر است [۱]. در این مق‌اله، الگوریتم جدیدی بر مبنای الگوریتم مراجع [۱،۲] ارائه می‌دهیم که بعد از اولین تکرار در الگوریتم مراجع مذکور، یک کیوبیت هدف دیگر به مدار اضافه می‌کند. این کیوبیت هدف جدید باعث افزایش احتمال موفقیت نسبت به الگوریتم‌های قبلی می‌شود.

#### الگوریتم جستجو

لیست تصادفی  $L = \{0, \dots, N-1\}$  را برای  $N = 2^n$  در نظر بگیرید. تابع انتخاب  $f: L \rightarrow \{0,1\}$  بر روی لیست مورد نظر را چنان تعریف می‌کنیم که برای تمامی  $M$  جواب، مقدار یک و برای بقیه‌ی حالت‌های غیرجواب (یعنی  $N-M$ ) مقدار صفر را اختیار کند. در ادامه، به ارائه‌ی الگوریتم مربوطه خواهیم پرداخت.

حالت اولیه‌ی  $|W_0\rangle = |0^{\otimes n+2}\rangle$  را در نظر بگیرید. با اثر دادن عملگر  $H^{\otimes n} \otimes I^{\otimes 2}$  بر حالت اولیه، به حالت  $|W_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} |i\rangle |00\rangle$  خواهیم

رسید.  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ، معرف گیت هادامارد می‌باشد. حالت کوانتومی  $|W_1\rangle$  را می‌توان به صورت

## مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

$$|W_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\alpha}_i |i\rangle |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i |i\rangle |00\rangle, \quad (1)$$

نیز نوشت، که در آن  $\bar{\alpha}_i = f(i) = 1 - \alpha_i$ . در واقع اولین جمله‌ی ظاهر شده در رابطه‌ی فوق جمع روی مجموعه‌ی جواب‌های تابع  $f$ ، و دومین جمله، جمع روی مجموعه‌ی غیرجواب‌های این تابع است. با مشاهده‌ی اسپین  $n$  کیوبیت اول، حالت  $|W_1\rangle$  سیستم با احتمال  $P_s = \frac{M}{N}$  به یکی از حالت‌های جواب، و با احتمال  $P_{ns} = 1 - \frac{M}{N}$  به یکی از حالت‌های غیرجواب تبدیل می‌شود. که در آن‌ها از روابط زیر استفاده شده است

$$P_s = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{\alpha}_j \langle j | W_1 \rangle = \bar{\Lambda}, \quad (2)$$

و

$$P_{ns} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \alpha_k \langle k | W_1 \rangle = \Lambda = 1 - \bar{\Lambda}. \quad (3)$$

اکنون عملگرهای  $U_f$  و  $P_{inv}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$U_f(|i\rangle|y\rangle|z\rangle) = |i\rangle|y \oplus f(i)\rangle|z\rangle, \quad (4)$$

و

$$P_{inv} = \{H^{\otimes n} \otimes I(2|0^{\otimes n+1}\rangle\langle 0^{\otimes n+1}| - I^{\otimes n+1})H^{\otimes n} \otimes I\} \otimes I. \quad (5)$$

ابتدا عملگر  $U_f$ ، سپس عملگر  $P_{inv}$  را بر حالت  $|W_1\rangle$  اثر می‌دهیم. با محاسباتی شبیه به مرجع [۱]، خواهیم داشت

$$|W_2\rangle = \frac{a_0}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i |i\rangle |00\rangle + \frac{b_0}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\alpha}_i |i\rangle |00\rangle + \frac{d_0}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\alpha}_i |i\rangle |10\rangle. \quad (6)$$

که در آن  $c_0 = e_0 = 0$  و  $d_0 = -1$ ،  $b_0 = 2\Lambda$ ،  $a_0 = 1 - 2\bar{\Lambda} = 2\Lambda - 1$  هستند.

در مرحله‌ی بعدی از الگوریتم پیشنهادی، دو عملگر  $U'_f$  و  $P'_{inv}$  را تعریف می‌کنیم

$$U'_f(|i\rangle|y\rangle|z\rangle) = |i\rangle|y\rangle|z \oplus f(i)\rangle, \quad (7)$$

و

$$P'_{inv} = \{H^{\otimes n} \otimes I^{\otimes 2}(2|0^{\otimes n+2}\rangle\langle 0^{\otimes n+2}| - I^{\otimes n+2})H^{\otimes n} \otimes I^{\otimes 2}\}. \quad (8)$$

با اثر دادن عملگر  $U'_f$  و سپس  $P'_{inv}$  بر روی حالت  $|W_2\rangle$ ، و انجام محاسبات مربوطه، به حالت کوانتمی جدید  $|\Psi_1\rangle$  خواهیم رسید.

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} a_0 [(2\Lambda - 1)\alpha_i + 2\Lambda \bar{\alpha}_i] |i\rangle |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\alpha}_i |i\rangle (b_0 |01\rangle + d_0 |11\rangle). \quad (9)$$

مراحل بعدی الگوریتم، مانند مرحله‌ی اخیر می‌باشند. به عبارتی، با تاثیر عملگر  $Q_q = (P'_{inv} U'_f)^q$ ، برای  $q \geq 1$ ، بر  $|W_2\rangle$ ، خواهیم داشت

$$|\Psi_q\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} (a_q \alpha_i + b_q \bar{\alpha}_i) |i\rangle |00\rangle + \frac{c_q}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\alpha}_i |i\rangle |01\rangle + \frac{d_q}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\alpha}_i |i\rangle |10\rangle + \frac{e_q}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\alpha}_i |i\rangle |11\rangle. \quad (10)$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر، می‌توان ضرایب اولیه، برای  $q=1$ ، را به صورت  $a_1 = a_0(2\Lambda - 1)$ ،  $b_1 = 2a_0 \Lambda$ ،  $c_1 = -b_0$ ،  $d_1 = 0$  و  $e_1 = -d_0$  محاسبه نمود.

همچنین می‌توان با مقایسه‌ی  $|\Psi_q\rangle$  با  $|\Psi_{q-1}\rangle$  نشان داد که ضرایب رابطه‌ی اخیر از روابط بازگشتی زیر پیروی می‌کنند [۸،۷]

$$\begin{aligned} a_q &= 2\Lambda a_{q-1} - a_{q-2} - 2\bar{\Lambda}(-1)^q, \\ b_q &= 2\Lambda b_{q-1} - b_{q-2} - 2\Lambda(-1)^q, \\ d_q &= -e_{q-1}, \\ c_q &= -b_{q-1}, \\ e_q &= -d_{q-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

جواب کلی این مجموعه معادلات بازگشتی، با شرایط اولیه‌ی ذکر شده، به صورت زیر می‌باشد [۸،۷]

## مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

$$\begin{aligned}
 a_q &= \frac{1}{\sin \theta} \left\{ (x - a_0) \sin(q-1)\theta + (x + a_0^2) \sin q\theta \right\} + (-1)^q x, \\
 b_q &= \frac{1}{\sin \theta} \left\{ (x' - b_0) \sin(q-1)\theta + (x' + a_0 b_0) \sin q\theta \right\} + (-1)^q x', \\
 c_q &= -b_{q-1}, \\
 d_q &= -\frac{1 + \cos q\pi}{2}, \\
 e_q &= -\frac{1 - \cos q\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

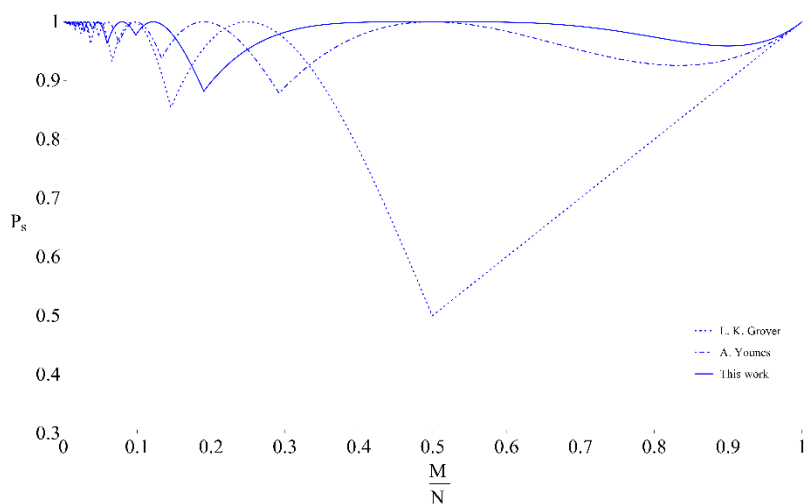
که در آن  $x = -\frac{\bar{\Lambda}}{1+\Lambda}$ ،  $x' = -\frac{\Lambda}{1+\Lambda}$  و  $\theta = \cos^{-1} \Lambda$  هستند.

### بحث و نتیجه‌گیری

همانطور که در بخش قبل مشاهده شد، احتمال موفقیت الگوریتم پیشنهادی پس از تکرار  $q$  مرحله، برابر است با

$$P_s = 1 - P_{ns} = 1 - (N - M) \frac{a_q^2}{N} = 1 - \bar{\Lambda} a_q^2. \tag{۱۳}$$

از روابط (۱۲) و (۱۳) مشاهده می‌شود که به دست آوردن تعداد دفعات تکرار بهینه‌ی  $q$ ، برای الگوریتم پیشنهادی بسیار مشکل است. به همین دلیل، احتمال موفقیت را بر حسب  $M/N$ ، برای تعداد دفعات تکراری که از تعداد دفعات بهینه‌ی مربوط به الگوریتم احمد یونس ( $q = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N}{M}}$ )، کوچکتر است، رسم نمودیم. مقدار احتمال موفقیت به دست آمده در رابطه‌ی اخیر، به همراه احتمال موفقیت الگوریتم‌های احمد یونس و گراور [۲،۳]، در شکل (۱) رسم شده است. در این شکل، منحنی پُر، احتمال موفقیت الگوریتم پیشنهادی، منحنی نقطه‌چین احتمال موفقیت الگوریتم گراور و منحنی خط-نقطه، احتمال موفقیت الگوریتم احمد یونس می‌باشند. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، احتمال موفقیت الگوریتم جستجوی کوانتومی پیشنهادی این مقاله برای تمامی مقادیر  $0.2492 \leq M/N \leq 1$  بیشتر از دو الگوریتم قبلی ارائه شده در مراجع [۲،۳] است. همچنین برای مقادیر  $0 \leq M/N < 0.2492$  در بازه‌هایی، الگوریتم پیشنهادی از الگوریتم‌های جستجوی قبلی قدرتمندتر است. با این وجود مقادیری از  $0 \leq M/N < 0.2492$  وجود دارند که الگوریتم احمد یونس و یا الگوریتم گراور از الگوریتم پیشنهادی قدرتمندتر هستند.



## مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

شکل ۱ : نمودار مقایسه‌ی احتمال موفقیت الگوریتم پیشنهادی (منحنی پُر) و الگوریتم گراور [۳-۵] (منحنی نقطه چین) و الگوریتم احمد یونس [۱-۲] (منحنی خط- نقطه)

### مراجع

- [۱] A. Younes, J. Row, and J. Miller, *Quantum Search Algorithm with More Reliable Behaviour Using Partial Diffusion*, AIP Conf. Proc **734**, 171 (2004).
- [۲] A. Younes, J. Row, and J. Miller, *Enhanced Quantum Searching Via Entanglement and Partial Diffusion*, Physica D **237**, 1074 (2008).
- [۳] L. K. Grover, *A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search*, Proc. of the 28<sup>th</sup> Ann. ACM Symp. On the Theory of Computing, **96** 212 (1996).
- [۴] L. K. Grover, *Fixed-Point Quantum Search*, Phys. Rev. Lett **95**, 150501 (2005).
- [۵] L. K. Grover. *Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack*, Phys. Rev. Lett **79**, 325 (1997).
- [۶] M. Boyer, G. Brassard, P. Hoyer, and A. Tapp, *Tight Bounds on Quantum Searching*, Fortschritte der Physik **46**, 493 (1998).
- [۷] G. Chen, S. Fulling, H. Lee, and M. Scully, *Grover's Algorithm for Multiobject Search in Quantum Computing*, Lecture Notes in Physics **561**, 165 (2001).
- [۸] G. Chen, S. Fulling, and J. Chen, *Generalization of Grover's Algorithm to Multi Object Search in Quantum Computing, part I: Continuous Time and Discrete Time*, in Chap 6 of Mathematics of Quantum Computation, edited by R.K. Brylinski and G. Chen, CRC Press, Boca Raton, Florida (2002).
- [۹] M. Mahmoodi Khoshdareh, H. Dashtianeh, H. Yahyavi Kuchaksaraei, H. Movahhedian, R. Rahimi, H. Mehri-Dehnavi, *An Improved Quantum Search Algorithm*, submitted to Quantum Information processing.